LIMITEAK

$$\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{0}} = \pm\infty$$

ALBO LIMITEAK KALKULATU

ADIBIDEA

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-3}{x-1} = \left(\frac{-2}{0}\right) = (\pm\infty).$$ Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-3}{x-1} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-3}{x-1} = -\infty$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

1. INFINITOAK KONPARATU

$\mathbf{X} \to \pm\infty$ **FUNTZIO ARRAZIONALETAN** $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, polinomioen maila altueneko monomioak konparatzen da:

Deg P(x) > Deg P(x)	$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$
Deg P(x) = Deg P(x)	$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{b}$
Deg P(x) < Deg P(x)	$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

ADIBIDEAK

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3-3x^2+1}{5x^2+2x-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{5x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{5} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5-3x^2}{3x^5-x^3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5-3x^2}{x^7-x^3} = 0$$

$X \to \pm\infty$ FUNTZIO DESBERDINEN INFINITOAK KONPARATUZ

$\downarrow \infty$ LOGARITMOEN INFINITOAK → BERREKETEN INFINITOAK (ERROAK) → FUNTZIO ESPONENTZIALEN INFINITOAK $\uparrow \infty$

- Berreketak eta erroen artean berretzailerik handiena, orden altueneko infinitoa da.
- Esponentzialen artean, berrekizun handieneko funtzioak, orden altueneko infinitoa da.
- Logaritmoen artean oinarririk txikiena daukan logaritmoaren infinitoa, ordena handieneko infinitoa da.

ADIBIDEA

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1{,}3^x}{300\,x^{50}} = +\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{25}}{2^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

2. L´HOPITAL

$x \to \pm\infty \quad eta \quad x \to c$

$$\lim_{x \to \blacksquare} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \lim_{x \to \blacksquare} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\frac{0}{0}$$

1. FUNTZIO ARRAZIONALETAN (polinomioak) $x \to \pm\infty \quad eta \quad x \to c$

$\lim_{x \to \blacksquare} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$ Zenbakitzaile eta izendatzailearen polinomioak FAKTORIZATU eta SINPLIFIKATU egiten dira

ADIBIDEA

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x \to -1} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^4 - x^2} = \lim_{x \to -1} \frac{x(x-2)(x+1)}{x^2(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{x(x-1)} = -\frac{3}{2}$$

Zenbakitzaile eta izendatzailearen funtzioak **errodun funtzioak** badira, **errotzaile komunera** bihurtu beharko da, faktorizatu eta sinplifikatzeko.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x^3-2x+1}}{\sqrt{x-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1} \sqrt[4]{\frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1} \sqrt[4]{x} = 1$$

2. FUNTZIOETAN ERROAK

Zenbakitzaile eta izendatzailearen funtzioatan erro karratuak batuketa edo eta kenketan agertzen badira konjukatuekin biderkatu eta zatitu egingo dogu, hurrengo identitate nabarmena aplikatuz.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ADIBIDEA

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-\sqrt{3x}}{x-3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{(x-3)(x+\sqrt{3x})} = \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+\sqrt{3x})} = \lim_{x\to 3} \frac{x}{(x+\sqrt{3x})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. L´HOPITAL

$x \to \pm\infty \quad eta \quad x \to c$

$$\lim_{x\to \blacksquare} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to \blacksquare} \frac{f´(x)}{g´(x)}$$

ADIBIDEA

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{sen\, x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

$1^{\pm\infty}$ $\quad x \to \pm\infty \quad eta \quad x \to c$

1. FORMULA ERABILIZ

$$\lim_{x\to \blacksquare} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to \blacksquare}(f(x)-1)g(x)}$$

ADIBIDEA

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x^2-2x}{3x^2-1}\right)^{2x-1} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2-2x}{3x^2-1}-1\right]\cdot(2x-1)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2+4x-1}{3x^2-1}} = e^{-4/3}$$

2. LOGARITMO NEPERTARRA APLIKATUZ (Ln)

Logaritmoaren bitartez, indeterminazio mota aldatuko da, berreketaren logaritmoaren propietatea aplikatuz.

$$\ln \lim_{x\to\blacksquare} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\blacksquare} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\blacksquare} \mathrm{g(x)} \ln f(x)$$

ADIBIDEA

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sen}x)^{1/x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} (\ln (1+\operatorname{sen}x)^{1/x}) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\cdot \ln(1+\operatorname{sen}x)\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{lu}\,(1+\operatorname{sen}x)}{x} =$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sen}x)^{1/x} = e^1 = e.$$

0^0 eta ∞^0

LOGARITMO NEPERTARRA APLIKATUZ (Ln)

Logaritmoaren bitartez, indeterminazio mota aldatuko da, berreketaren logaritmoaren propietatea aplikatuz.

$$\ln \lim_{x\to\blacksquare} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\blacksquare} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\blacksquare} \mathrm{g(x)} \ln f(x)$$

$\infty - \infty$

1. INFINITOAK KONPARATU

ADIBIDEA

$$\lim_{x\to\infty}\left(3^x - \sqrt{x^8-2}\right) = \infty$$

2. FUNTZIO ARRAZIONALEKIN

Izendatzaile komunera bihurtuz

ADIBIDEA

Como es indeterminado, $(\pm\infty) - (\pm\infty)$, efectuamos la operación:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{x-3}{(x-1)(x-2)} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-2} = -1$$

3. ERROAK BADAGOZ

Konjugatuarekin biderkatuz eta zatituz

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ADIBIDEA

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right)}{\sqrt{4x^2+1} + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1} + 2x} = 0$$

$0 \cdot \infty$

$\lim\limits_{x\to\blacksquare} f(x) = 0 \; eta \; \lim\limits_{x\to\blacksquare} g(x) = \infty \; eta$ bada, $\mathbf{0} \cdot \infty$ indeterminazioa, $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ edo $\frac{\infty}{\infty}$ indeterminazioa bihurtu behar da hurrengo aldaketen bitartez:

$$\lim_{x\to\blacksquare} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to\blacksquare} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$$

$$\lim_{x\to\blacksquare} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to\blacksquare} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\infty}{\infty}$$

ADIBIDEA

$$\lim_{x \to +\infty} x\,(e^{1/x} - 1) = (+\infty \cdot 0) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{(-1/x^2)\, e^{1/x}}{-1/x^2} = 1$$